

DUALITY CONCEPT & DUAL SIMPLEX

Widha Kusumaningdyah, ST., MT

2012

KONSEP DASAR

- Dual simplex merupakan variasi dari metode simplex
- Diaplikasikan pada kondisi : Primal : FEASIBLE, Dual : INFEASIBLE
- Merupakan *mirror image* dari metode simplex
 - ✓ terkait dengan penentuan leaving dan entering variable
- Mengeliminasi penggunaan artificial variable
- Digunakan untuk analisa sensitivitas

MERUBAH BENTUK PRIMAL - DUAL

		Primal Problem					Right Side	
		Coefficient of:						
		x_1	x_2	...	x_n			
Dual Problem	Coefficient of:	y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq b_1$	Coefficients for Objective Function (Minimize)
	y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\leq b_2$		
	\vdots					\vdots	
	y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$		
	Right Side	VI	VI	...	VI			
		c_1	c_2	...	c_n			
		Coefficients for Objective Function (Maximize)						

BENTUK DUAL NORMAL PROBLEM

$$\begin{aligned}
 \max z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 \text{s.t.} \quad &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
 &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
 &\vdots \\
 \text{s.t.} \quad &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
 &x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \min w &= b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \\
 \text{s.t.} \quad &a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
 &a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\
 &\vdots \\
 &a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n \\
 &y_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)
 \end{aligned}$$

FORMULA RINGKAS

merubah Primal menjadi Dual

Tujuan Primal Standar*	DUAL		
	TUJUAN	BATASAN	VARIABLE
Maksimasi	Minimasi	\geq	Tidak dibatasi
Minimasi	Maksimasi	\leq	Tidak dibatas

* Semua batasan primal adalah berbentuk persamaan dan semua variable adalah non-negatif

CONTOH

PRIMAL PROBLEM



$$\begin{aligned} \max z &= 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 \\ \text{s.t.} \quad &8x_1 + 1.6x_2 + 1.5x_3 \leq 48 \\ &4x_1 + 1.2x_2 + 1.5x_3 \leq 20 \\ &2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 \leq 8 \\ &x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

DUAL PROBLEM



$$\begin{aligned} \min w &= 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 \\ \text{s.t.} \quad &8y_1 + 1.4y_2 + 1.2y_3 \geq 60 \\ &6y_1 + 1.2y_2 + 1.5y_3 \geq 30 \\ &6y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20 \\ &y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

MEMBUAT NORMAL DUAL SIMPLEX - DARI LP TIDAK NORMAL-

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 = 2$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_2 \geq 3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \leq 1$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 - x_1 \geq 0, x_2 \text{ URS}$$

LANGKAH Pengerjaan

1. INISIALISASI

MERUBAH PROBLEM MENJADI NORMAL

- a. Merubah fungsi pembatas dari bentuk persamaan (=) menjadi dua bentuk pertidaksamaan, yaitu bentuk \geq dan bentuk \leq .
- b. Merubah fungsi pembatas dari bentuk \geq menjadi \leq (dengan mengkalikan kedua sisi dengan -1)
- c. Merubah variable tidak terbatas x_i by $x_i = x_i' - x_i''$, dimana $x_i' \geq 0$ dan $x_i'' \geq 0$
- d. Pastikan koefisien pada fungsi tujuan adalah POSITIF >> (bentuk standar simplex)

Merubah bentuk Dual ke bentuk Standar

Dual Problem

Minimize $W = \mathbf{y}\mathbf{b}$,
subject to
 $\mathbf{y}\mathbf{A} \geq \mathbf{c}$
and
 $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Converted to Standard Form

Maximize $(-W) = -\mathbf{y}\mathbf{b}$,
subject to
 $-\mathbf{y}\mathbf{A} \leq -\mathbf{c}$
and
 $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

*Converted to
Standard Form*

Maximize $Z = \mathbf{c}\mathbf{x}$,
subject to
 $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$
and
 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

Its Dual Problem

Minimize $(-Z) = -\mathbf{c}\mathbf{x}$,
subject to
 $-\mathbf{A}\mathbf{x} \geq -\mathbf{b}$
and
 $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

2. *FEASIBILITY TEST*

- Periksa apakah semua variabel basis sudah non-negatif.
- Jika sudah, maka solusi sudah feasible dan optimal. Jika belum, lakukan iterasi.

3. ITERASI

- **Tetapkan leaving variable** dengan nilai yang paling negatif dari kolom RHS dari bentuk dual.
- **Tetapkan entering variable**, dipilih dari baris leaving variable dengan koefisien yang paling negatif dan dengan rasio terkecil (nilai absolut koefisien : koefisien fungsi tujuan)
- **Selesaikan dengan metode eliminasi Gaussian**
- Lanjutkan ke feasibility test sampai didapatkan solusi optimal

Maximize $Z = 3x_1 + 5x_2,$

subject to the restrictions

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

and

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Minimize $W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3,$

subject to

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

and

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Maximize $Z = -4y_1 - 12y_2 - 18y_3,$

subject to

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$

$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

and

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

Iteration	Basic Variable	Eq.	Coefficient of:					Right Side	
			Z	y_1	y_2	y_3	y_4		y_5
0	Z	(0)	1	4	12	18	0	0	0
	y_4	(1)	0	-1	0	-3	1	0	-3
	y_5	(2)	0	0	-2	-2	0	1	-5
1	Z	(0)	1	4	0	6	0	6	-30
	y_4	(1)	0	-1	0	-3	1	0	-3
	y_2	(2)	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
2	Z	(0)	1	2	0	0	2	6	-36
	y_3	(1)	0	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
	y_2	(2)	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

Maximize $Z = 3x_1 + 5x_2$,

subject to

$$x_1 \leq 4$$

$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

and

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Iteration	Basic Variable	Eq.	Coefficient of:					Right Side	
			Z	x_1	x_2	x_3	x_4		x_5
0	Z	(0)	1	-3	-5	0	0	0	0
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_4	(2)	0	0	2	0	1	0	12
	x_5	(3)	0	3	2	0	0	1	18
1	Z	(0)	1	-3	0	0	$\frac{5}{2}$	0	30
	x_3	(1)	0	1	0	1	0	0	4
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_5	(3)	0	3	0	0	-1	1	6
2	Z	(0)	1	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	36
	x_3	(1)	0	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	2
	x_2	(2)	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	6
	x_1	(3)	0	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2

LATIHAN

$$\text{Min } 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 3 \\2x_1 - x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\x_1, x_2, x_3 &\geq 0\end{aligned}$$

$$\text{Max } -2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

s.t.

$$\begin{aligned}-x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &\leq -3 \\-2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 &\leq -4 \\x_i &\geq 0\end{aligned}$$

References:

Frederick Hillier and Gerald J. Lieberman.
Introduction to Operations Research. 7th
ed. The McGraw-Hill Companies, Inc,
2001.

Hamdy A. Taha. *Operations Research: An
Introduction*. 8th Edition. Prentice-Hall,
Inc, 2007